

EQUAÇÃO DA PRESSÃO DO VAPOR SATURADO

DISSERTAÇÃO

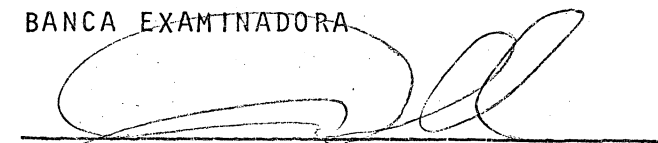
apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas  
para obtenção do Grau de Mestre em Ciências pela Universidade  
Federal do Paraná

por

PAULO EUGÊNIO MENDONÇA DE ANUNCIAÇÃO

Licenciado em Física

BANCA EXAMINADORA



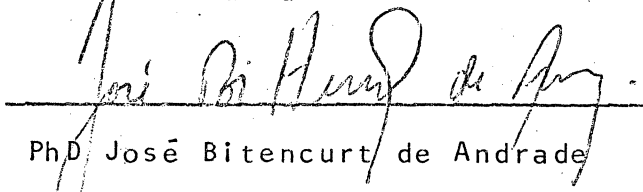
---

Ms. Álvaro Doubek - Orientador



---

PhD Liu Kai - Co-Orientador



---

PhD José Bitencurt de Andrade

EQUAÇÃO DA PRESSÃO DO VAPOR SATURADO

DISSERTAÇÃO

apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas  
para obtenção do Grau de Mestre em Ciências pela Universidade  
Federal do Paraná

por

PAULO EUGÊNIO MENDONÇA DE ANUNCIAÇÃO

Licenciado em Física

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

1978

## AGRADECIMENTOS

Minha            Gratidão

Ao Prof. LEONEL MORO e Prof. NELSON DE LUCA ,  
por me apresentarem ao Curso de Pós-Graduação.

Ao Prof. CAMIL GEMAEL,  
por haver-me proposto um desafio,  
o qual acabou se transformando neste resultado.

Ao Prof. ALVARO DOUBEK, Prof. LIU KAI e  
Prof. JOSÉ BITENCURT DE ANDRADE, orientadores  
e amigos.

À LUISA,  
esposa cuja dedicação, ajudou-me a vencer  
mais esta árdua tarefa.

A meus PAIS,  
sem cujo apoio não poderia chegar até aqui.

À CAPES,  
pelo apoio financeiro muito importante.

Aos colegas e amigos,  
que diretamente ajudando ou incentivando,  
me foram úteis.

Paulo Eugênio

## C O N T E Ú D O

Apresentação .....	i
Agradecimentos .....	ii
Conteúdo .....	iii
Sumário .....	iv
1. INTRODUÇÃO .....	01
2. ESTRUTURA DA ATMOSFERA .....	03
3. PROPAGAÇÃO DAS O.E.M. NA ATMOSFERA .....	06
4. CORREÇÃO DA REFRAÇÃO .....	10
5. PRESSÃO DO VAPOR D'ÁGUA .....	13
6. EQUAÇÃO PROCURADA .....	17
7. CONCLUSÕES .....	30
8. RECOMENDAÇÕES .....	31
APÊNDICES .....	34
ÍNDICE .....	35
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	36

## S U M A R I O

Com este trabalho pretendemos, trazer para a Geodésia , uma contribuição da Física através da Termodinâmica e da Meteorologia, uma equação própria para o cálculo da conhecida Pressão do Vapor Saturado ( $e'$ ), em substituição à tabela em uso.

Como as tomadas de medidas eletrônicas de distâncias na Troposfera, para fins de trabalhos de Ciências Geodésicas , são de curta duração, o modelo termodinâmico da Atmosfera aqui adotado é adiabático e estático.

Assim, estaremos apresentando uma equação de há muito desejada dos geodestas brasileiros, face aos vários inconvenientes da tabela atualmente em uso.

## S U M M A R Y

With this work we intend to bring to Geodesy a contribution from Physics through Thermodynamic and Meteorology, an adequate equation for the calculation of the well known Pressure of Saturated Vapour ( $e'$ ), in order to replace the existing table.

Since the obtention of distances of electronic measurements in the Troposphere for purposes of Geodesic Sciences are of short duration, the thermodynamic model of the Atmosphere here adapted is adiabatic and static.

Thus, we will present an equation long time desired by Brazilian geodesists due to the various inconveniences of the table being used presently.

## 1. INTRODUÇÃO

Meteorologia é a parte da Geofísica que estuda os fenômenos que ocorrem na atmosfera.

Quando se começa a descobrir os segredos do comportamento dessa atmosfera, verifica-se que a atual condição do nosso "habitat" está intimamente ligada às variações dos elementos que compõem o cenário ecológico. Só não se consegue entender até hoje, porque não se dá maior importância ao estudo da Meteorologia, disciplina básica para todo aquele que irá se dedicar profissionalmente na área de Geociências.

A própria condição de vida, tal como a conhecemos, é uma função inerente de nossa atmosfera.

Desenvolver estudos dentro da área de Geociências ou da área da Tecnologia Agropecuária, sem dar o devido valor à Meteorologia, é querer estudar os fenômenos da vida sem levar em consideração os elementos básicos que garantem o fôlego da própria vida [ANUNCIAÇÃO (1975)].

A Geodésia e a Astronomia, que por seus métodos de observação, utilizam equipamentos óticos e eletrônicos, encontram problemas especiais com relação ao fenômeno da refração das ondas eletromagnéticas na atmosfera.

Nas medidas eletrônicas de distâncias, em trabalhos geodésicos de trilateração - totalmente realizados dentro da troposfera, são encontrados problemas, tanto provocados por refração como por absorção e difusão.

Nos levantamentos aerofotogramétricos, que na sua maioria são realizados em altitudes ainda dentro da troposfera, o problema da refração deve ser considerado na direção vertical, entre o solo e o nível de vôo. Nesse caso, aparecem os problemas dos gradientes verticais de temperatura, de pressão, etc.

Nos trabalhos de Astronomia, na observação dos astros, os raios luminosos recebidos pelo observador sofrem o fenômeno da refração ao penetrarem no meio gasoso que envolve nosso planeta. À medida em que se aproximam do observador, tais raios vão encontrando uma atmosfera cada vez mais densa, sofrendo em consequência refração. Dessa maneira, esses raios descrevem uma trajetória curva, cuja abertura está voltada para o plano do horizonte do observador, isto é, se aproxima da normal.

Trata-se de uma refração onde os raios luminosos têm que cruzar do vácuo para um meio complexo como é a nossa atmosfera, para a qual ainda não se encontrou um modelo satisfatório para o cálculo dos efeitos dessa refração, face às suas variáveis em jogo e ao desconhecimento de uma lei adequada que as relacione matematicamente.

Existe ainda, o tipo de cálculo para a refração de ondas eletromagnéticas provenientes de satélites artificiais, os quais se encontram numa região onde o ar é menos denso, e apresenta certas características diferentes, em relação à troposfera.

Na realidade, toda propagação eletromagnética apresenta efeitos de REFRAÇÃO VERTICAL e REFRAÇÃO LATERAL.

Neste nosso trabalho estaremos abordando a refração segundo as Leis de Snell. E da mesma forma destacamos que, estaremos abordando apenas o problema da refração que ocorre na obtenção de medidas eletrônicas de distâncias, onde inclusive, fazemos uma aplicação da equação da pressão do vapor saturado tomando dados reais de um trabalho de levantamentos eletrônicos de distâncias.

///

## 2. ESTRUTURA DA ATMOSFERA

Nossa atmosfera, sendo uma mistura homogênea de vários gases e estando encerrada num volume não constante, comporta-se aproximadamente, como um gas ideal, cujas variáveis de estado são: pressão, temperatura e volume; sendo que, este nunca permanece constante, pois o limite superior da atmosfera encontra-se numa altitude ainda indefinida (diluída pelo espaço exterior).

A atmosfera apresenta assim, uma relação entre pressão e temperatura de uma forma inversa àquela apresentada pelos gases ideais. Esse fenômeno pode ser observado através de um estudo da variação dos Sistemas de Pressão das Massas de Ar (6), capítulo importante da Meteorologia.

### 2.1. ESTRUTURA FÍSICA

Num estudo da estrutura vertical da atmosfera, encontramos várias camadas com características próprias (3), separadas por regiões de transição.

Apenas para situar a troposfera, camada dentro da qual se encontra a parte da refração abordada neste nosso trabalho, apresentaremos aqui, uma estrutura simplificada da atmosfera:

<u>CAMADAS</u>	<u>ALTITUDES</u>
I o n o s f e r a .....	entre 80 km e 500 km.
M e s o s f e r a .....	entre 50 km e 80 km.
E s t r a t o s f e r a .....	entre 8 km e 50 km. <sup>1</sup>
T r o p o s f e r a .....	entre superfície terrestre e 8 km. <sup>2</sup>

---

<sup>1</sup> . Nos polos, a Estratosfera tem sua base numa altitude em torno de 8 km, e no equador pode chegar a 16 km (ambos, valores médios).

<sup>2</sup> . Nos polos, a Troposfera da mesma forma, tem limite superior em torno de 8 km, e no equador em torno de 16 km.



### 2.1.1. T R O P O S F E R A

Significa "região de mistura" ou "turbulência". Sua base é adjacente à superfície terrestre, e tem seu limite superior próximo dos 8 km na região dos Polos, indo gradativamente aumentando até 16 km na região do Equador (4). Seu limite superior varia conforme as Estações do Ano também, sendo mais baixo no inverno e mais alto no verão (4).

É a região da atmosfera onde ocorrem todas as variações de tempo meteorológico, correntes convectivas e instabilidades atmosféricas. Caracteriza-se por ser uma região de turbulência, ocasionada pelas bruscas e constantes trocas de calor por convecção, também apresenta um gradiente vertical de temperatura (20). Nela todas as nuvens têm, sua gênese, desenvolvimento e epílogo.

### 2.2. COMPOSIÇÃO MÉDIA QUÍMICA

Excluindo o vapor d'água, na atmosfera foram identificados os seguintes elementos e compostos químicos (6):

	<u>% volumétrica</u>	<u>ppm volumétrica</u>
N <sub>2</sub>	78,084 ± 0,004	
O <sub>2</sub>	20,946 ± 0,002	
CO <sub>2</sub>	0,033 ± 0,001	
Ar	0,934 ± 0,001	
Ne		18,18 ± 0,04
He		5,24 ± 0,004
Kr		1,14 ± 0,01
Xe		0,087 ± 0,001
H <sub>2</sub>		0,5
CH <sub>4</sub>		2,0
N <sub>2</sub> O		0,5 ± 0,1

O ar contém certos elementos que são responsáveis por sua poluição, tais como: hidrocarbonetos gasosos, gas carbônico em quantidade superior à média desejável, outros gases provenientes de resíduos industriais, escapamentos de veículos automotores, além de partículas sólidas (minerais e orgânicas) que ficam em suspensão próximo ao solo. Todos esses elementos, figuram em proporções variadas na baixa troposfera e servem como núcleos higroscópicos, para a condensação do vapor d'água.

Como aproximadamente, 70% da superfície terrestre é constituída por massa líquida dos mares, boa parte dessa massa é evaporada diariamente para a baixa troposfera, sobrecarregando-a com o vapor d'água. Esse vapor dentro da composição atmosférica, ocupa no máximo 4% do volume total da atmosfera (6).

A maior parte desse vapor concentra-se na camada inferior da troposfera, desde o nível médio do mar até 5.000 metros de altitude aproximadamente, e daí em diante, apresenta-se na forma de cristais.

///

### 3. PROPAGAÇÃO DAS ONDAS ELETROMAGNÉTICAS NA ATMOSFERA

No final do século passado, o físico alemão Heinrich Hertz em suas descobertas sobre as propriedades das ondas eletromagnéticas, provou que as mesmas se propagam no vácuo com velocidade dada através da relação:

$$c = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \quad (3.1)$$

sendo:  $\epsilon_0$  = permissividade elétrica do vácuo,  
(valor de  $8,854 \cdot 10^{-12}$  Coulomb<sup>2</sup>/Newton . metro<sup>2</sup> )  
 $\mu_0$  = permeabilidade magnética do vácuo,  
(valor de  $4\pi \cdot 10^{-7}$  Newton/Ampère<sup>2</sup> )

Os trabalhos desenvolvidos para se determinar um valor cada vez mais preciso da velocidade da luz, além dos resultados apresentados, mostram também, a perseverança e tenacidade do homem em busca das verdades científicas.

A União Geodésica e Geofísica Internacional recomenda o seguinte valor, aceito em 1957:

$$c = 299\,792,5 \pm 0,4 \text{ km.s}^{-1}$$

#### 3.1. ÍNDICE DE REFRAÇÃO

Como sabemos, as ondas eletromagnéticas se propagam com velocidade cujo valor pode ser calculado através de:

$$a) \quad \text{Para o vácuo:} \quad c = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \quad (3.1.1)$$

$$b) \quad \text{Para o ar :} \quad c = 1 / \sqrt{\epsilon \mu} \quad (3.1.2)$$

Sendo  $\epsilon$  e  $\mu$  a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética da atmosfera, respectivamente.

Da relação entre as permissividades elétricas e entre as permeabilidades magnéticas (22) temos, respectivamente:

a) Permissividade elétrica relativa (constante dielétrica do meio):  $\epsilon / \epsilon_0 \approx \kappa_e$

b) Permeabilidade magnética relativa do meio:  $\mu / \mu_0 = \kappa_m$

Como consequência da Lei de Snell, sabemos que:

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\kappa_e \cdot \kappa_m} \quad (3.1.3)$$

Sendo  $\kappa_m$  um valor que depende da suscetibilidade magnética do meio ( $\chi_m$ ) através da relação  $\kappa_m = 1 + \chi_m$ , e como  $\chi_m$  é um valor muito pequeno para o caso do Ar ( $0,9 \cdot 10^{-10}$ ), (6), podemos aceitar a seguinte aproximação:

$$n = \sqrt{\kappa_e \cdot (1 + \chi_m)} \iff n \approx \sqrt{\kappa_e} \iff n^2 \approx \kappa_e \quad (3.1.4)$$

Por definição, permissividade relativa do meio é:

$$\kappa_e \approx \epsilon / \epsilon_0 \iff 1 + \chi_e = \kappa_e \quad (3.1.5)$$

onde  $\chi_e$  é a suscetibilidade elétrica estática do meio, e está relacionada com as propriedades quânticas do meio através da relação (22):

$$\chi_e = \alpha \cdot N \quad (3.1.6)$$

sendo:  $N$ , o número de átomos ou moléculas por unidade de volume (29);

$\alpha$ , polarizabilidade atômica em função de  $\omega$ , sendo seu valor calculado pela relação (19):

$$\alpha = \frac{e^2}{\epsilon_0 \cdot m \cdot (\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (3.1.7)$$

sendo:

$\omega_0$ , frequência natural dos átomos do meio;

$\omega$ , frequência de oscilação real (do sinal);

$e$ , carga do elétron;

$m$ , massa do elétron.

Substituindo agora a equação (3.1.7) na equação (3.1.5) através da equação (3.1.6) temos:

$$\kappa_e \approx 1 + \frac{N \cdot e^2}{\epsilon_0 \cdot m \cdot (\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (3.1.8)$$

Dessa forma, a suscetibilidade elétrica estática será :

$$\chi_e \approx N \cdot \alpha = \frac{N \cdot e^2}{\epsilon_0 \cdot m \cdot (\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (3.1.9)$$

Substituindo a equação (3.1.4) na equação (3.1.8) teremos:

$$n^2 = 1 + \frac{N \cdot e^2}{\epsilon_0 \cdot m \cdot (\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (3.1.10)$$

A qual poderá ser colocada na seguinte forma:

$$n^2 = 1 + \frac{N \cdot e^2}{\epsilon_0 \cdot m \cdot \omega_0^2} \cdot \frac{1}{1 - (\omega^2/\omega_0^2)} \quad (3.1.11)$$

ou ainda fazendo  $Z = \frac{N \cdot e^2}{\epsilon_0 \cdot m \cdot \omega_0^2}$ , teremos:

$$n = \sqrt{1 + Z \cdot \frac{1}{1 - (\omega/\omega_0)^2}} \quad (3.1.12)$$

Aplicando a esta equação o desenvolvimento em série de potência vem:

$$n = 1 + \frac{Z}{2} \cdot \left[ \frac{1}{1 - (\omega/\omega_0)^2} \right] - \frac{Z^2}{8} \cdot \left[ \frac{1}{1 - (\omega/\omega_0)^2} \right]^2 \quad (3.1.13)$$

Ainda desenvolvendo o termo entre colchetes em série de McLaurin:

$$\frac{1}{1 - (\omega/\omega_0)^2} = 1 + (\omega/\omega_0)^2 + (\omega/\omega_0)^4 \quad (3.1.14)$$

que substituindo na equação (3.1.13) esta então ficará:

$$n = 1 + \frac{Z}{2} \left[ 1 + (\omega/\omega_0)^2 + (\omega/\omega_0)^4 \right] +$$

$$- \frac{Z^2}{8} \left[ 1 + (\omega/\omega_0)^2 + (\omega/\omega_0)^4 \right]^2 \quad (3.1.15)$$

Abandonando os termos cujos expoentes sejam superior a 4 teremos; após desenvolver a potência do colchete:

$$n = 1 + \frac{Z}{2} \left[ 1 + (\omega/\omega_0)^2 + (\omega/\omega_0)^4 \right] +$$

$$- \frac{Z^2}{8} \left[ 1 + 2(\omega/\omega_0)^2 + 3(\omega/\omega_0)^4 \right] \quad (3.1.16)$$

Fatorando os termos semelhantes:

$$n = 1 + \frac{Z(4-Z)}{8} + \frac{Z(2-Z)}{4} \cdot (\omega/\omega_0)^2 + \frac{Z(4-3Z)}{8} \cdot (\omega/\omega_0)^4 \quad (3.1.17)$$

Agora, substituindo a variável " $\omega$ " por seu valor (22) dado pela relação  $\omega = 2\pi c/\lambda$ , onde " $\lambda$ " é o comprimento de onda da luz no vácuo, em micra, " $c$ " a velocidade da luz no vácuo, teremos:

$$n = 1 + \frac{Z(4-Z)}{8} + \frac{\pi^2 Z(2-Z)}{\omega_0^2} \cdot \frac{c^2}{\lambda^2} + \frac{2\pi^4 Z(4-3Z)}{\omega_0^4} \cdot \frac{c^4}{\lambda^4} \quad (3.1.18)$$

Que é a forma aproximada da equação de CAUCHY:

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} \quad (3.1.19)$$

sendo:  $A = 1 + \frac{Z \cdot (4 - Z)}{8}$

$$B = \frac{\pi^2 Z \cdot (2 - Z)}{\omega_0^2} \cdot c^2$$

$$C = \frac{2\pi^4 \cdot Z \cdot (4 - 3Z)}{\omega_0^4} \cdot c^4$$

///

#### 4. CORREÇÃO DA REFRAÇÃO

No vácuo, todas as ondas eletromagnéticas se propagam com a mesma velocidade "c". Na atmosfera porém, essa velocidade é reduzida para:

$$v = c / n \quad (4.1)$$

onde "n" é o índice de refração da atmosfera.

Determinada experimentalmente por Gladstone & Dale, a relação entre o índice de refração e a massa específica da atmosfera (10) é conhecida como:

$$\frac{n - 1}{\rho} = \text{constante, isto é: } n = f(\rho) \quad (4.2)$$

Através da equação dos gases ideais, temos para a massa específica do Ar a seguinte relação (19):

$$\rho = \frac{p \cdot M}{R' \cdot T} \quad (4.3)$$

sendo: M, massa molecular média do Ar;  
 R', constante dos gases ideais para o Ar;  
 p, pressão atmosférica;  
 T, temperatura absoluta do Ar.

Substituindo a equação (4.3) na equação (4.2) teremos "n" expresso como uma função da pressão e da temperatura:

$$n = f(p, T) \quad (4.4.)$$

onde:  $p = p_1 + e$

sendo:  $p_1$ , pressão atmosférica parcial;  
 e, pressão parcial do vapor d'água existente na atmosfera.

#### 4.1. REFRAÇÃO NAS MEDIDAS ELETRÔNICAS DE DISTÂNCIAS

Nesta altura do nosso estudo, encontramos as seguintes relações entre o índice de refração e suas variáveis:

a) Do ponto de vista teórico, conforme a equação (3.1.18):

$$n = f(\lambda) \quad (4.1.1)$$

b) Do ponto de vista fenomenológico temos (vide eq. 4.4):

$$n = f(p, T) \quad \text{ou} \\ n = f(p_1, e, T) \quad (4.1.2)$$

Se tomarmos as variáveis da equação (4.1.2) de uma determinada atmosfera padrão, então o índice de refração dependerá apenas do comprimento de onda ( $\lambda$ ) do sinal gerado pelo instrumento de medida; quando então teremos um índice de refração chamado ÍNDICE DE REFRAÇÃO PADRÃO, para determinado comprimento de onda ( $\lambda$ ):

$$n_s = f(\lambda) \quad \text{"índice padrão"} \quad (4.1.3)$$

Edlén (11), tomando para exemplo a análise acima referida, através da equação de Cauchy (7) chegou à seguinte equação para o cálculo do índice de refração padrão ( $n_s$ ):

$$(n_s - 1) = - \left( 28760,4 + \frac{162,88}{\lambda^2} + \frac{1,36}{\lambda^4} \right) \cdot 10^{-8} \quad (4.1.4)$$

para  $\lambda = \frac{2\pi \cdot c}{\omega}$ , sendo  $\lambda$  o comprimento de onda da luz no vácuo (luz visível) em micra.

Uma vez fixado o tipo de instrumento a ser utilizado, isto é, fixado o comprimento de onda do sinal gerado para as medições de distâncias, então o nosso problema se reduzirá às correções das variáveis atmosféricas ( $p_t, T_t$ ) para a hora ( $t$ ) da observação:

$$(n_t - 1) = (n_s(f(\lambda)) - 1) \cdot f(p_t, T_t) \quad (4.1.5)$$

sendo  $n_t$  índice de refração na hora da observação.



#### 4.2. CORREÇÃO DA REFRAÇÃO

A correção a ser introduzida na medida eletrônica de distância assim obtida (distância bruta), é calculada através da relação:

$$\partial n = n_s - n_t \quad (4.2.2)$$

sendo:  $n_s$ , o índice de refração padrão;

$n_t$ , o índice de refração da hora (t) da observação;

$\partial n$ , afastamento do índice de refração atual ( $n_t$ ) do índice de refração padrão ( $n_s$ ).

Dessa forma, a distância corrigida (X) será dada segundo [GEMAELE - (1970)], pela relação:

$$X = ( 1 + \partial n ) \cdot X'$$

sendo  $X'$ , a distância medida diretamente através do instrumento, chamada distância bruta (14).

///

## 5. PRESSÃO DO VAPOR D'ÁGUA

Como este nosso trabalho se apoia na variável atmosférica conhecida como "pressão do vapor", apresentaremos aqui, algumas considerações básicas para melhor compreensão do objetivo a que nos propusemos.

Na bibliografia da Física a pressão do vapor é representada pela letra (p), pois se trata de uma grandeza pressão. Na bibliografia de Ciências Geodésicas é representada pela letra (e).

Devido ao seu alto poder de absorção das micro-ondas e dos raios luminosos (15), o vapor d'água acarreta certas dificuldades na obtenção de medidas de distâncias.

O vapor d'água é um constituinte normal da atmosfera, e cada medida da pressão atmosférica a inclui, como uma pequena parcela da pressão total. Essa contribuição parcial é chamada "pressão do vapor" ou "tensão do vapor".

### 5.1. EQUAÇÕES DA PRESSÃO DO VAPOR

Várias são as equações experimentais apresentadas por inúmeros pesquisadores, para o cálculo da pressão do vapor, como poderemos observar com alguns exemplos:

5.1.1. Um dos trabalhos considerados pioneiros é devido a Carrier (21), cuja equação semi-empírica é:

$$e = e' - \frac{(p - e') \cdot (t - t')}{1555 - 0,72 \cdot t'} \quad (5.1)$$

para:  $p$  = pressão atmosférica em  $N/m^2$  ;  
 $e'$  = pressão do vapor saturado, em  $N/m^2$  ;  
 $t$  = temperatura do bulbo seco, em  $^{\circ}C$  ;  
 $t'$  = temperatura do bulbo úmido, em  $^{\circ}C$ .

5.1.2. Bomford (8) apresenta a seguinte equação:

$$e = e' - C \cdot (t - t') \cdot p / 1006 \quad (5.2)$$

para:  
 $e'$  = pressão do vapor saturado, em Pol. Hg ;

$p$  = pressão atmosférica, em Pol. Hg;

$t$  = temperatura do bulbo seco, em °F;

$t'$  = temperatura do bulbo úmido, em °F;

$C = 0,50$  para o caso de temperatura do bulbo úmido acima de 0°C;

$C = 0,43$  para o caso de temperatura do bulbo úmido abaixo de 0°C.

5.1.3. Doubek (13), utiliza a seguinte equação (SURVEYING AND MAPPING, March 1972):

$$e = e' - 0,000367.p.(t-t').(1+\frac{t'-32}{1571}) \quad (5.3)$$

onde:  $p$  = pressão atmosférica, em Po. Hg;

$e'$  = pressão do vapor saturado, em Pol. Hg;

$t$  = temperatura do ar (bulbo seco), em °F;

$t'$  = temperatura do ar (bulbo úmido), em °F.

5.1.4. Saucier (20), apresenta esta equação:

$$e = (p - e'/m_d) / 0,378030.f_w \quad (5.4)$$

sendo:  $e'$  = pressão do vapor saturado, em mb;

$p$  = pressão atmosférica, em mb;

$m_d$  = constante para o ar (28,966);

$f_w$  = fator constante de correção à lei dos gases ideais (1,0024).

5.1.5. Longley & Hewson (17) mostram a pressão do vapor calculada através da equação:

$$e = e' - (c_p/W).p.(T - T')/L \quad (5.5)$$

também conhecida como a EQUAÇÃO DO PSICRÔMETRO, onde:

$e'$  = pressão do vapor saturado, em mb;

$c_p$  = calor específico do ar à pressão constante, cujo valor é 0,239 cal/g °C;

$p$  = pressão atmosférica, em milibar;  
 $T$  = temperatura do ar (bulbo seco), em °K;  
 $T'$  = temperatura do ar (bulbo úmido), em °K;  
 $L$  = calor latente de vaporização da água;  
 $W$  = razão de mistura entre o vapor e o ar seco (0,622).

5.1.6. A fórmula de Regnaut (5), também empírica:

$$e = e' - 0,0006.p.(T-T').(1+T'/610) \quad (5.6)$$

onde as variáveis são utilizadas conforme as do parágrafo anterior.

5.1.7. E finalmente temos a de Hauwitz (5), onde a pressão do vapor pode ser calculada a partir da equação diferencial de Clausius-Clapeyron, dando uma equação da forma:

$$\frac{d e}{e} = 5,38 \cdot 10^3 \cdot \frac{d T_d^2}{T_d^2} \quad (5.7)$$

onde:  $e$  = pressão do vapor à temperatura  $T_d$ , em milibar;

$T_d$  = temperatura do ponto de orvalho, em °K.

Exponencialmente essa equação toma a seguinte forma:

$$e = 6,11 \cdot 10^{5,38 \cdot 10^3 \cdot \left( \frac{1}{273} - \frac{1}{T_d} \right)} \quad (5.8)$$

para: " $e$ " dado em milibar;

" $T_d$ " dado em °K.

Para as finalidades de trabalhos em Geodésia, esta equação não é muito adequada, pois depende de valores do ponto de orvalho " $T_d$ ", o qual por sua vez depende de valores tabelados em função das temperaturas do bulbo seco e do bulbo úmido.

## 5.2. REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA PRESSÃO DO VAPOR

De acordo com Paul De Vuyst (12), a variação da pressão do vapor d'água em relação à temperatura do ar, pode ser representada através do seguinte gráfico:

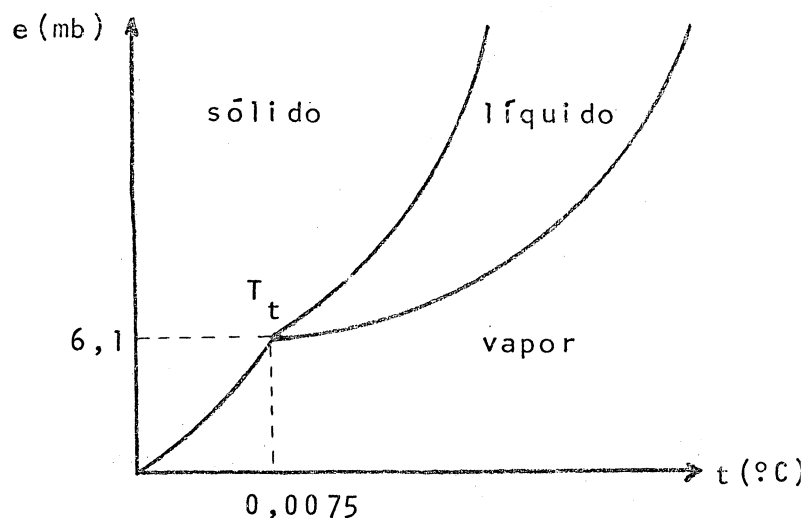


Fig. 1 - Pressão do Vapor x Temperatura

( $T_t$  = ponto tríplice da água)

A pressão do vapor d'água "e" pode ser calculada em função da temperatura do ponto de orvalho " $T_d$ ", conforme equação (5.8).

Porem, como a temperatura do ponto de orvalho é um valor tabelado em função das temperaturas de bulbo seco e bulbo úmido, torna-se desaconselhável o uso dessa equação.

Pode-se também calcular a pressão do vapor "e" através das equações (5.1), (5.2), (5.3), (5.4), (5.5) e (5.6) mas porem, todas elas apresentam a dependência da variável "e", chamada pressão do vapor saturado, cuja equação é o objeto deste trabalho.

///

## 6. A EQUAÇÃO PROCURADA

Sendo " $e$ " a pressão do vapor saturado, uma grandeza conhecida na bibliografia da Física, ou mais especificamente, nos trabalhos de Termodinâmica e Meteorologia; e também sendo citada para uso nos trabalhos de Ciências Geodésicas, sem contudo, ser conhecida sua equação nas atividades dos geodestas brasileiros, procuramos esquematizar a seguinte metodologia para este nosso trabalho:

- i) Pesquisa bibliográfica onde procuramos levantar vários trabalhos realizados sobre a pressão do vapor saturado, e deles retirar o máximo possível para captar o real significado termodinâmico dessa grandeza; encontrar as equações existentes a respeito, bem como o significado de suas variáveis e constantes.
- ii) Comparações entre as equações encontradas nessa pesquisa bibliográfica.
- iii) Comparação entre, cada uma dessas equações com o conceito físico de pressão do vapor saturado, reproduzindo uma tabela a partir de cada equação.
- iv) Dessa forma, procuramos encontrar a equação que melhor se aproximasse das condições teóricas da pressão do vapor saturado.
- v) Por fim, a aplicação de algumas dessas equações usando dados reais (apenas como uma pequena amostra sem qualquer significado estatístico), de um trabalho já realizado, comparando com os resultados obtidos pelo uso da tabela existente na bibliografia geodésica.

### 6.1. PRESSÃO DO VAPOR SATURADO

Sabemos da Física que, se isolarmos certa quantidade de ar seco sobre uma superfície d'água, as moléculas de vapor d'água, que à temperatura ambiente se desprenderão dessa superfície líquida, serão absorvidas pelo ar seco ali isolado, gradativamente. Enquanto isso, uma pequena parcela dessas moléculas que saíram da superfície líquida, estarão regressando sucessivamente donde saíram, criando assim, um ciclo de moléculas entre a

superfície líquida e o ar ali isolado (5).

Se a capacidade de volume desse ar isolado sobre essa superfície líquida permanecer constante, um estado de equilíbrio será eventualmente alcançado quando, a quantidade "n" de moléculas que desprenderam da superfície líquida for igual à quantidade "u" das moléculas que regressaram à mesma superfície líquida; aumentando dessa forma, a pressão do ar sobre a superfície em questão, e a pressão total do ar será então a soma da pressão inicial com a pressão do vapor atual.

Se a capacidade de volume que contem esse sistema for aumentada, e a temperatura do sistema permanecer constante, haverá então, um reinício no ciclo de moléculas que se desprendem da superfície líquida e de moléculas que retornam à essa superfície, até que, se estabeleça um novo equilíbrio (16).

À medida em que estiver aumentando a quantidade de moléculas de vapor d'água no ar assim isolado, a pressão exercida pelo ar sobre a superfície líquida estará aumentando também gradativamente, devido à pressão parcial do vapor que também estará aumentando.

Quando ocorrer o novo estado de equilíbrio, com a temperatura permanecendo constante, a pressão parcial do vapor também permanecerá constante. Esse valor da pressão do vapor em equilíbrio a uma mesma temperatura é sempre o mesmo, quer existam ou não outros gases misturados (23).

A esse valor de equilíbrio da pressão parcial do vapor d'água, dá-se o nome de PRESSÃO DO VAPOR SATURADO (ou pressão de saturação do vapor), ou como é conhecido na Geodésia: TENSÃO DO VAPOR SATURADO, o qual depende somente da temperatura (23).

Pelo conceito termodinâmico, a pressão do vapor saturado apresenta as seguintes características, para uma atmosfera padrão, como por exemplo a adotada pelo "International Meteorological Organization":

- i)  $e'(0^{\circ}\text{C}) = 6,1071$  milibares, para a temperatura do ponto de solidificação da água;
- ii)  $e'(100^{\circ}\text{C}) = 1.013,246$  milibares, para a temperatura do ponto de ebulição da água.

A relação existente entre a pressão do vapor saturado e a temperatura, é demonstrada através da tabela fornecida pelo "Smithsonian Institution Tables" 6 th ed. Washington, 1951, - para uma atmosfera padrão definida pela "International Commission for Air Navigation" I.C.A.N. (20):

Tabela - 6.1.1

Pressão do vapor saturado em função da temperatura

t (°C)	e' (mb)	t (°C)	e' (mb)
- 20	1,25	25	31,67
- 15	1,91	30	42,43
- 10	2,86	40	73,8
- 05	4,21	50	123,4
00	6,11	60	199,3
05	8,72	70	311,7
10	12,28	80	474,0
15	17,04	90	701,0
20	23,37	100	1013,3

Como vimos no capítulo 5, em todas as equações para o cálculo da refração, sempre aparece a variável "e" - pressão parcial do vapor, a qual por sua vez, depende do valor da pressão do vapor saturado "e'".

Em Meteorologia, a equação para o cálculo da pressão do vapor saturado é deduzida com base na teoria termodinâmica, a partir da equação da Clausius-Clapeyron (16).

Tal equação na forma diferencial, apresenta a taxa de variação da pressão do vapor saturado em relação à temperatura:

$$\frac{d e'}{d T} (v' - v) = \frac{L}{T} \quad (6.1.1)$$



onde:  $L$  = calor latente de vaporização;  
 $v'$  = volume específico do vapor d'água;  
 $v$  = volume específico da água;  
 $T$  = temperatura absoluta.

Como  $v' = 206\,300$  e  $v=1$ , podemos considerar  $v' \gg v$  (5), e a equação (6.1.1) ficará:

$$\frac{d e'}{d T} v' = \frac{L}{T} \quad (6.1.2)$$

Da equação dos gases perfeitos, para o caso do vapor saturado sabemos que:

$$e' \cdot v' = R' \cdot T \implies v' = R' \cdot T / e' \quad (6.1.3)$$

Substituindo o valor de  $v'$  na equação (6.1.2), teremos:

$$\frac{d e'}{e'} = \frac{L}{R'} \cdot \frac{d T}{T^2} \quad (6.1.4)$$

Após integra-la teremos o seguinte resultado:

$$\ln e' = \frac{L}{R'} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) + \ln e'_0 \quad (6.1.5)$$

Ainda exponencialmente essa equação tomará a seguinte forma:

$$e' = e'_0 \cdot \ell^h \quad (6.1.6)$$

sendo:  $h = L/R' \cdot (1/T_0 - 1/T)$

$\ell$  = base do logaritmo neperiano

Esta é então a equação da pressão do vapor saturado por dedução teórica termodinâmica.

Para os seguintes valores de suas constantes temos:

$$T_0 = 273,3 \text{ (Kelvin);}$$

$$e'_0 = 6,107 \text{ (mb) (valor da pressão do vapor saturado à temperatura de 273,3 K); Atmosfera Padrão da I.C.A.N. ;}$$

$$R' = c_{pw} - c_{vw} \text{ sendo:}$$

$$c_{pw} = 0,445 \text{ (calor específico do vapor d'água à pressão constante);}$$

$$c_{vw} = 0,335 \text{ (calor específico do vapor d'água à volume constante).}$$

$$R' = 0,110$$

$$L = 597,3 \text{ cal/g}$$

quando então essa equação toma a seguinte forma prática, transformada sua base neperiana em decimal:

$$e' = 6,107 \cdot 10^{\frac{9,78 \cdot t}{273,3+t}} \quad (6.1.8)$$

sendo  $e'$  (mb) e  $t$  (°C).

Teoricamente, a equação de Magnus (5) tem a mesma forma:

$$e' = 6,107 \cdot 10^{\frac{10,8 \cdot t}{273+t}} \quad (6.1.9)$$

para  $e'$  (mb) e  $t$  (°C).

Essas duas equações no entanto, não satisfazem as deduções teóricas da Termodinâmica para a Pressão do Vapor Saturado, conforme poderemos notar, comparando os resultados de cada um de seus valores, se colocados em forma de tabela, como por exemplo, no caso da equação (6.1.8), que é mostrada na página seguinte.

A equação (6.1.8), para fins de comparação nos dá a seguinte tabela, cujo argumento de entrada é a temperatura :

Tabela - 6.1.2

Tabela formada através da equação (6.1.8)

t(°C)	e'(mb)	t(°C)	e'(mb)	t(°C)	e'(mb)
-25.	0.632707	17.	22.83583	59.	332.9216
-24.	0.698848	18.	24.55977	60.	351.9452
-23.	0.771289	19.	26.40071	61.	371.9322
-22.	0.850572	20.	28.36566	62.	392.9247
-21.	0.937277	21.	30.46199	63.	414.9666
-20.	1.032029	22.	32.69745	64.	438.1032
-19.	1.135500	23.	35.08019	65.	462.3814
-18.	1.248410	24.	37.61876	66.	487.8499
-17.	1.371532	25.	40.32215	67.	514.5591
-16.	1.505696	26.	43.19976	68.	542.5611
-15.	1.651789	27.	46.26149	69.	571.9098
-14.	1.810764	28.	49.51771	70.	602.6611
-13.	1.983638	29.	52.97928	71.	634.8727
-12.	2.171501	30.	56.65758	72.	668.6043
-11.	2.375516	31.	60.56454	73.	703.9177
-10.	2.596926	32.	64.71263	74.	740.8765
-9.	2.837059	33.	69.11493	75.	779.5467
-8.	3.097330	34.	73.78509	76.	819.9964
-7.	3.379251	35.	78.73742	77.	862.2960
-6.	3.684430	36.	83.98686	78.	906.5179
-5.	4.014582	37.	89.54901	79.	952.7371
-4.	4.371530	38.	95.44020	80.	1001.0311
-3.	4.757217	39.	101.67745	81.	1051.4794
-2.	5.173705	40.	108.27856	82.	1104.1646
-1.	5.623190	41.	115.26209	83.	1159.1715
0.	6.108000	42.	122.64738	84.	1216.5875
1.	6.630609	43.	130.45465	85.	1276.5029
2.	7.193641	44.	138.70493	86.	1339.0108
3.	7.799880	45.	147.42016	87.	1404.2068
4.	8.452276	46.	156.62321	88.	1472.1897
5.	9.153953	47.	166.33786	89.	1543.0612
6.	9.908221	48.	176.58892	90.	1616.9258
7.	10.718582	49.	187.40216	91.	1693.8914
8.	11.588740	50.	198.80444	92.	1774.0688
9.	12.522613	51.	210.82367	93.	1857.5722
10.	13.524340	52.	223.48888	94.	1944.5189
11.	14.598294	53.	236.83025	95.	2035.0297
12.	15.749091	54.	250.87914	96.	2129.2288
13.	16.981602	55.	265.66814	97.	2227.2439
14.	18.300966	56.	281.23108	98.	2329.2062
15.	19.712603	57.	297.60309	99.	2435.2506
16.	21.222221	58.	314.82066	100.	2545.5158

Para: t (0°C) ..... e' = 6,108 mb  
t (100°C) ..... e' = 2545,51 mb

## 6.2. EQUAÇÕES EXISTENTES

Experimentalmente, existe em Meteorologia uma equação que mais se aproxima da tabela em uso nos trabalhos de Geodésia, como por exemplo:

$$e' = e'_0 \cdot 10^K \quad (6.2.1)$$

sendo:  $K = a \cdot t / (b + t)$

$$e'_0 = 6,11 \text{ mb}$$

$t$  = dado em °C (temperatura do ar, bulbo seco).

O interessante a respeito desta equação, é a sua procedência. Segundo SAUCIER (20), tal equação pertence a TETENS e segundo BELINSKII (5) pertence a MAGNUS; pois até os valores das constantes (a) e (b) são idênticos:

i) em superfícies (bulbo úmido) com temperatura abaixo de 0°C:

$$a = 9,5;$$

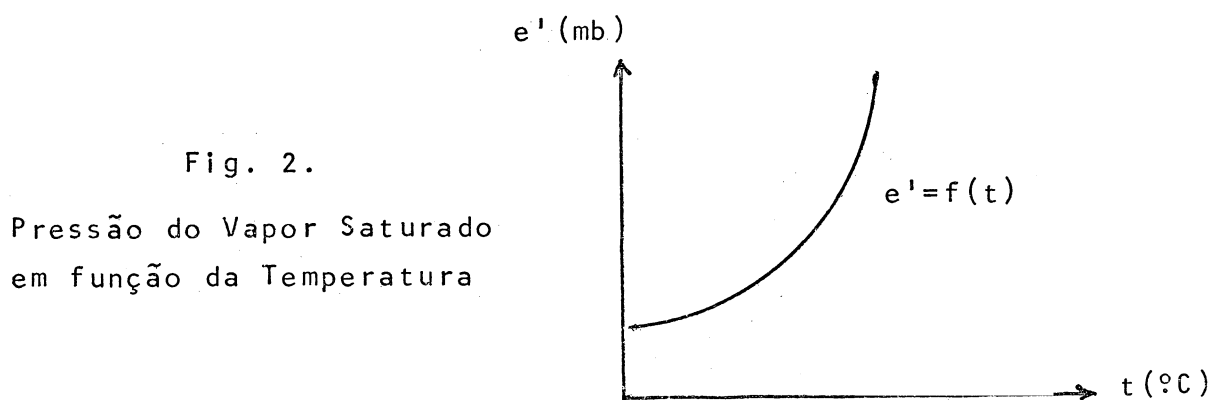
$$b = 265,5 \text{ °C};$$

ii) em superfícies (bulbo úmido) com temperatura acima de 0°C:

$$a = 7,5 ;$$

$$b = 237,3 \text{ °C}.$$

Segundo BELINSKII (5), a equação de MAGNUS pode ser representada através do seguinte gráfico:



Essa mesma equação é também apresentada por ZUEV (24) para ( $e'_0$ ) expressa em mmHg:

$$e' = e'_0 \cdot 10^{\frac{a \cdot t}{b + t}} \quad (6.2.2)$$

onde:  $e'_0 = 4,58 \text{ mm Hg } (\approx 6,11 \text{ mb})$

$a = 7,5$

$b = 237,5 \text{ } ^\circ\text{C}$

$t = \text{dado em } ^\circ\text{C}.$

Através de suas pesquisas no campo espacial, a NASA (1) chegou a propor a mesma equação, porém com valores diferentes para as mesmas constantes:

$$e' = e'_0 \cdot 10^{\frac{a \cdot t}{b + t}} \quad (6.2.3)$$

onde:  $e'_0 = 6.1078 \text{ mb}$

$a = 7,6326$

$b = 241,9 \text{ } ^\circ\text{C}$

$t = \text{dado em } ^\circ\text{C}$

A equação adotada pelo INTERNATIONAL METEOROLOGICAL ORGANIZATION (Washington, 1947) é formulada por Goff-Gratch (25), a qual também é sugerida por Bomford (8) para uso nos trabalhos de Geociências.

Essa equação tem a mesma forma das demais, porém suas constantes são mais complexas:

$$e' = e'_0 \cdot 10^X \quad (6.2.4)$$

onde:  $e'_0 = (373,16/T)^{5,02808} \cdot 1013,246 \text{ (em mb)};$

$X = A + B + C$

$A = -7,90298 \cdot (373,16/T - 1)$

$B = -1,3816 \cdot E-07 \cdot (10^{11,344 \cdot (1 - T/373,16)} - 1)$

$C = 8,1328 \cdot E-03 \cdot (10^{-3,49149 \cdot (373,16/T)} - 1)$

$T = \text{(dado em graus Kelvin)}.$

Tabela - 6.2.1

Tabela de valores formados pela equação (6.2.1)

Equação está citada como pertencente a O. TETENS por Saucier (20) e como pertencente a MAGNUS por Belinskii (5).

t(°C)	e'(mb)	t(°C)	e'(mb)	t(°C)	e'(mb)
-25.	0.799283	17.	19.37586	59.	190.2407
-24.	0.874989	18.	20.63832	60.	199.3000
-23.	0.957058	19.	21.97221	61.	208.7256
-22.	1.045953	20.	23.38093	62.	218.5294
-21.	1.142166	21.	24.86800	63.	228.7238
-20.	1.246220	22.	26.43707	64.	239.3213
-19.	1.358668	23.	28.09193	65.	250.3348
-18.	1.480095	24.	29.83652	66.	261.7774
-17.	1.611122	25.	31.67489	67.	273.6627
-16.	1.752404	26.	33.61126	68.	286.0044
-15.	1.904635	27.	35.65000	69.	298.8167
-14.	2.068546	28.	37.79562	70.	312.1138
-13.	2.244910	29.	40.05279	71.	325.9106
-12.	2.434542	30.	42.42634	72.	340.2221
-11.	2.638301	31.	44.92127	73.	355.0637
-10.	2.857093	32.	47.54274	74.	370.4511
-9.	3.091869	33.	50.29607	75.	386.4003
-8.	3.343635	34.	53.18678	76.	402.9278
-7.	3.613443	35.	56.22055	77.	420.0502
-6.	3.902404	36.	59.40324	78.	437.7847
-5.	4.211682	37.	62.74091	79.	456.1486
-4.	4.542500	38.	66.23981	80.	475.1598
-3.	4.896142	39.	69.90636	81.	494.8363
-2.	5.273954	40.	73.74721	82.	515.1967
-1.	5.677347	41.	77.76918	83.	536.2598
0.	6.107800	42.	81.97932	84.	558.0448
1.	6.566859	43.	86.38489	85.	580.5714
2.	7.056147	44.	90.99333	86.	603.8594
3.	7.577357	45.	95.81234	87.	627.9292
4.	8.132262	46.	100.84982	88.	652.8015
5.	8.722713	47.	106.11389	89.	678.4975
6.	9.350646	48.	111.61291	90.	705.0386
7.	10.018080	49.	117.35548	91.	732.4467
8.	10.727122	50.	123.35042	92.	760.7440
9.	11.479972	51.	129.60679	93.	789.9533
10.	12.278920	52.	136.13393	94.	820.0975
11.	13.126355	53.	142.94138	95.	851.2000
12.	14.024766	54.	150.03896	96.	883.2849
13.	14.976742	55.	157.43676	97.	916.3763
14.	15.984980	56.	165.14510	98.	950.4988
15.	17.052283	57.	173.17460	99.	985.6777
16.	18.181568	58.	181.53611	100.	1021.9383

Para: t = 0°C ..... e' = 6,1078 mb  
t = 100°C ..... e' = 1.021,93 mb

Tabela - 6.2.2

Tabela formada através da equação (6.2.2), devida a Zuev (2.4):

t(°C)	e'(mmHg)	t(°C)	e'(mmHg)	t(°C)	e'(mmHg)
-25.	0.600582	17.	14.52046	59.	142.3671
-24.	0.657516	18.	15.46585	60.	149.1431
-23.	0.719121	19.	16.46469	61.	156.1929
-22.	0.785845	20.	17.51953	62.	163.5256
-21.	0.858055	21.	18.63298	63.	171.1502
-20.	0.936144	22.	19.80780	64.	179.0762
-19.	1.020526	23.	21.04681	65.	187.3132
-18.	1.111639	24.	22.35294	66.	195.8710
-17.	1.209948	25.	23.72924	67.	204.7597
-16.	1.315944	26.	25.17886	68.	213.9995
-15.	1.430145	27.	26.70506	69.	223.5711
-14.	1.553100	28.	28.31122	70.	233.5152
-13.	1.685387	29.	30.00083	71.	243.8328
-12.	1.827616	30.	31.77749	72.	254.5351
-11.	1.980431	31.	33.64495	73.	265.6337
-10.	2.144509	32.	35.60707	74.	277.1402
-9.	2.320563	33.	37.66781	75.	289.0667
-8.	2.509344	34.	39.83132	76.	301.4255
-7.	2.711642	35.	42.10182	77.	314.2289
-6.	2.928287	36.	44.48372	78.	327.4898
-5.	3.160151	37.	46.98153	79.	341.2212
-4.	3.408148	38.	49.59991	80.	355.4364
-3.	3.673240	39.	52.34369	81.	370.1489
-2.	3.956434	40.	55.21782	82.	385.3726
-1.	4.258785	41.	58.22741	83.	401.1214
0.	4.581400	42.	61.37771	84.	417.4099
1.	4.925436	43.	64.67416	85.	434.2525
2.	5.292107	44.	68.12233	86.	451.6643
3.	5.682681	45.	71.72795	87.	469.6604
4.	6.098482	46.	75.49695	88.	488.2564
5.	6.540898	47.	79.43538	89.	507.4679
6.	7.011374	48.	83.54951	90.	527.3110
7.	7.511421	49.	87.84574	91.	547.8022
8.	8.042617	50.	92.33068	92.	568.9579
9.	8.606605	51.	97.01110	93.	590.7951
10.	9.205100	52.	101.89396	94.	613.3311
11.	9.839888	53.	106.98642	95.	636.5834
12.	10.512830	54.	112.29581	96.	660.5698
13.	11.225863	55.	117.82965	97.	685.3084
14.	11.981004	56.	123.59568	98.	710.8177
15.	12.780350	57.	129.60182	99.	737.1164
16.	13.626081	58.	135.85618	100.	764.2235

// XEQ

Para t = 0°C ..... e' = 4,5814 mm Hg.  
t = 100°C ..... e' = 764,2235 mm Hg

Tabela - 6.2.3

Tabela formada através da equação (6.2.3), proposta pela NASA (1):

t(°C)	e'(mb)	t(°C)	e'(mb)	t(°C)	e'(mb)
-25.	0.805652	17.	19.36688	59.	191.6342
-24.	0.881480	18.	20.62998	60.	209.8157
-23.	0.963654	19.	21.96482	61.	210.3721
-22.	1.052634	20.	23.37483	62.	220.3158
-21.	1.148912	21.	24.86358	63.	230.6598
-20.	1.253006	22.	26.43478	64.	241.4167
-19.	1.365469	23.	28.09227	65.	252.6004
-18.	1.486883	24.	29.84004	66.	264.2245
-17.	1.617867	25.	31.68221	67.	276.3030
-16.	1.759075	26.	33.62306	68.	288.8502
-15.	1.911198	27.	35.66704	69.	301.8810
-14.	2.074964	28.	37.81873	70.	315.4105
-13.	2.251146	29.	40.08288	71.	329.4539
-12.	2.440557	30.	42.46443	72.	344.0271
-11.	2.644053	31.	44.96844	73.	359.1462
-10.	2.862539	32.	47.60020	74.	374.8276
-9.	3.096968	33.	50.36513	75.	391.0883
-8.	3.348340	34.	53.26886	76.	407.9453
-7.	3.617711	35.	56.31719	77.	425.4164
-6.	3.906190	36.	59.51613	78.	443.5194
-5.	4.214941	37.	62.87186	79.	462.2726
-4.	4.545188	38.	66.39077	80.	481.6948
-3.	4.898216	39.	70.07946	81.	501.8052
-2.	5.275374	40.	73.94471	82.	522.6231
-1.	5.678074	41.	77.99355	83.	544.1684
0.	6.107800	42.	82.23320	84.	566.4616
1.	6.566101	43.	86.67109	85.	589.5231
2.	7.054605	44.	91.31490	86.	613.3743
3.	7.575012	45.	96.17253	87.	638.0365
4.	8.129102	46.	101.25211	88.	663.5318
5.	8.718734	47.	106.56199	89.	689.8824
6.	9.345853	48.	112.11080	90.	717.1112
7.	10.012490	49.	117.90739	91.	745.2413
8.	10.720764	50.	123.96086	92.	774.2964
9.	11.472888	51.	130.28058	93.	804.3006
10.	12.271170	52.	136.87616	94.	835.2783
11.	13.118017	53.	143.75749	95.	867.2545
12.	14.015935	54.	150.93472	96.	900.2547
13.	14.967539	55.	158.41828	97.	934.3046
14.	15.975546	56.	166.21888	98.	969.4306
15.	17.042790	57.	174.34751	99.	1005.6594
16.	18.172215	58.	182.81543	100.	1043.0183

// XEQ

Para:    t = 0°C ..... e' = 6,1078 mb.

         t = 100°C ..... e' = 1.043,0183 mb



Tabela - 6.2.4.

Tabela formada através da equação (6.2.4)  
para valores de : t (em graus Celsius) e  
e' (em milibares).

É a equação adotada pela "International Meteorological Orga-  
nization - Washington, 1947, formulada por GOFF-GRATCH (25).

t (°C)	e' (mb)	t (°C)	e' (mb)	t (°C)	e' (mb)
-25.	0.806965	17.	19.36722	59.	190.2184
-24.	0.882743	18.	20.62977	60.	199.2602
-23.	0.964859	19.	21.96387	61.	208.6654
-22.	1.053776	20.	23.37294	62.	218.4458
-21.	1.149985	21.	24.86049	63.	228.6133
-20.	1.254005	22.	26.43019	64.	239.1802
-19.	1.366389	23.	28.08583	65.	250.1589
-18.	1.487721	24.	29.83135	66.	261.5624
-17.	1.618620	25.	31.67083	67.	273.4037
-16.	1.759740	26.	33.60847	68.	285.6961
-15.	1.911773	27.	35.64865	69.	298.4534
-14.	2.075451	28.	37.79588	70.	311.6894
-13.	2.251546	29.	40.05483	71.	325.4184
-12.	2.440871	30.	42.43033	72.	339.6550
-11.	2.644286	31.	44.92737	73.	354.4140
-10.	2.862697	32.	47.55110	74.	369.7106
-9.	3.097056	33.	50.30685	75.	385.5601
-8.	3.348368	34.	53.20010	76.	401.9785
-7.	3.617688	35.	56.23653	77.	418.9816
-6.	3.906126	36.	59.42198	78.	436.5859
-5.	4.214849	37.	62.76249	79.	454.8082
-4.	4.545083	38.	66.26426	80.	473.6653
-3.	4.898113	39.	69.93370	81.	493.1747
-2.	5.275288	40.	73.77741	82.	513.3540
-1.	5.678022	41.	77.80218	83.	534.2212
0.	6.107797	42.	82.01500	84.	555.7945
1.	6.566166	43.	86.42307	85.	578.0927
2.	7.054754	44.	91.03379	86.	601.1346
3.	7.575260	45.	95.85476	87.	624.9396
4.	8.129461	46.	100.89383	88.	649.5274
5.	8.719217	47.	106.15902	89.	674.9178
6.	9.346467	48.	111.65860	90.	701.1312
7.	10.013238	49.	117.40107	91.	728.1883
8.	10.721644	50.	123.39513	92.	756.1100
9.	11.473892	51.	129.64973	93.	784.9178
10.	12.272281	52.	136.17405	94.	814.6332
11.	13.119208	53.	142.97751	95.	845.2783
12.	14.017170	54.	150.06977	96.	876.8756
13.	14.968765	55.	157.46073	97.	909.4477
14.	15.976699	56.	165.16054	98.	943.0178
15.	17.043783	57.	173.17961	99.	977.6093
16.	18.172944	58.	181.52859	100.	1013.2460

Para: t = 0°C ..... e' = 6,1077 mb

t = 100°C ..... e' = 1 013 246 mb

6.8. COMPARAÇÕES ATRAVÉS DE UM TRABALHO REAL

Tomamos os valores da pressão do vapor saturado "e" através da tabela-2 usada por Gemael (14), e também através das equações 6.2.1 e 6.2.4, e aplicamos aos valores tomados de um trabalho real (2). Calculamos a Distância Eletrônica, cujos resultados colocamos na tabela abaixo, para comparações:

Comparação dos cálculos das distâncias eletrônicas usando Tabela-2 de (14), Equação - 6.2.1 e Equação - 6.2.4

1	2	3	4	5	6	7	8	
Pressão (pol.Hg)	Tempera- tura(B. seco) (°F)	Tempera- tura(B. úmido) (°F)	Distância Bruta (m)	Distância Eletrônica (Tabela-2) (m)	Distância Eletrônica (Eq. 6.2.1) (m)	Distância Eletrônica (Eq.6.2.4) (m)	Diferenças 5 - 6 (m)	5 - 7 (m)
27,67	74,62	68,37	30844,133	30843,831	30843,832	30843,834	-0,001	-0,003
28,14	77,00	71,25	42729,309	42728,338	42728,339	42728,341	-0,001	-0,003
28,75	79,50	67,75	27360,056	27359,926	27359,926	27359,928	0,000	-0,002
28,71	81,00	64,87	21181,190	21181,448	21181,448	21181,449	0,000	-0,001
28,63	81,25	65,25	37411,376	37411,810	37411,812	37411,814	-0,002	-0,004
28,57	84,12	74,62	14962,916	14962,502	14962,502	14962,503	0,000	-0,001
27,72	79,75	73,37	34663,497	34662,665	34662,668	34662,671	-0,003	-0,006
28,37	83,37	71,80	43039,068	43038,514	43038,513	43038,516	+0,001	-0,002
28,48	67,75	62,55	14806,581	14806,502	14806,502	14806,503	0,000	-0,001
28,13	82,75	67,00	30887,479	30887,815	30887,816	30887,818	-0,001	-0,003
28,14	75,25	68,25	19445,747	19445,518	19445,519	19445,520	-0,001	-0,002
28,16	85,37	68,50	24388,571	24388,797	24388,799	24388,800	-0,002	-0,003

OBS: O sinal usado para astomadas destas medidas foi micro-onas.

## 7. CONCLUSÕES

Feitas as comparações, podemos observar que, embora a equação (6.2.4) mais se enquadre dentro das características conceituais da Termodinâmica, tanto essa quanto a equação (6.2.1) podem ser utilizadas nos trabalhos de Ciências Geodésicas aqui em nosso País, dentro de um intervalo de temperatura entre 0°C e 40°C, pois dentro desse intervalo, é pequena a diferença entre os valores de "e'" calculados através dessas duas equações (ver tabelas 6.2.1 e 6.2.4) - cujas diferenças aparecem entre 0,0001 mb e 0,03 mb.

### 7.1. OUTRAS VANTAGENS

Ainda apresentam as seguintes vantagens sobre a tabela atualmente em uso nos trabalhos de Ciências Geodésicas no Brasil:

- i) menor volume de trabalho nos cálculos da refração, pois os mesmos poderão ser realizados através de uma única equação diretamente em função dos parâmetros: pressão parcial atmosférica ( $p_1$ ), pressão parcial do vapor ( $e$ ), pressão do vapor saturado ( $e'$ ), temperatura do ar - bulbo seco ( $t$ ) e temperatura do ar - bulbo úmido ( $t'$ ); evitando-se dessa forma, os problemas de interpolações;
- ii) será utilizado menor espaço de memória no computador, para o cálculo da correção da refração, pois não será mais necessário armazenar a tabela;
- iii) com qualquer uma das equações poderemos usar todos os valores das grandezas, medidas conforme as normas da Associação Brasileira de Normas Técnicas.

### 7.2. OUTRAS APLICAÇÕES

Essas equações bem podem ser usadas, além dos trabalhos de Levantamentos de Medidas Eletrônicas de Distâncias, também para os demais trabalhos realizados no Brasil no campo das Ciências Geodésicas, recomendados a seguir.

## 8. RECOMENDAÇÕES

Como a Pressão do Vapor Saturado também aparece nos cálculos da refração nos trabalhos de Astronomia, Geodésia Satélite e de Aerofotogrametria, vemos as seguintes possibilidades:

### 8.1. Na Astronomia.

- i) As equações apresentadas em Bomford (8) apresentam a pressão parcial do vapor (e):

$$\Delta_z'' = 552'' \cdot \tan Z \cdot (P - 0,14 \cdot e) / T \quad (8.1.1)$$

onde:  $\Delta_z$  = correção da distância zenital em segundos de arco;  
 $Z$  = distância zenital para valores menores que  $40^\circ$ ;  
 $P$  = pressão atmosférica no local da observação (pol.Hg);  
 $e$  = pressão parcial do vapor d'água no local da observação, que depende da pressão do vapor saturado -  $e'$  (ambos em pol.Hg);  
 $T$  = temperatura do ar no local da observação ( $^\circ K$ ).

ou ainda:

$$\Delta_z'' = 16'',3 \cdot \tan Z \cdot (P - 0,14 \cdot e) / T \quad (8.1.2)$$

onde:  $\Delta_z$  = correção da distância zenital em segundos de arco;  
 $Z$  = distância zenital para valores menores que  $40^\circ$ ;  
 $P$  = pressão atmosférica no local da observação (mb);  
 $e$  = pressão parcial do vapor d'água no local da observação, que depende da pressão do vapor saturado -  $e'$  (ambos em milibares);  
 $T$  = temperatura do ar no local da observação ( $^\circ K$ ).

- ii) A equação apresentada por Saastamoinen, também traz a pressão parcial do vapor na fórmula para a correção da refração astronômica (26):

$$\Delta_z'' = 16,271'' \cdot \tan Z \left( 1 + 0,0000394 \cdot \tan^2 Z \cdot \frac{P - 0,156 \cdot e}{T} \right) \cdot \left( \frac{P - 0,156 \cdot e}{T} - 0,749 \cdot (\tan^3 Z + \tan Z) \cdot \frac{P}{1000} \right) \quad (8.1.3)$$

onde:  $\Delta_z$  = correção da distância zenital em segundos de arco;  
 $Z$  = distância zenital para valores até 75°;  
 $P$  = pressão atmosférica no local da observação (mb);  
 $e$  = pressão parcial do vapor d'água no local da observação, que depende da pressão do vapor saturado - ( $e'$ ) em mb ;  
 $T$  = temperatura do ar no local da observação (K).

## 8.2. Na Geodésia Satélite.

A correção da refração atmosférica para a troposfera e estratosfera, de ondas eletromagnéticas emitidas por satélites (9), é dada através das seguintes fórmulas:

i) Para a faixa do L.A.S.E.R. (como sinal emitido):

$$\partial_{s_0} = 0,002357 \cdot \sec(z) \cdot (P + 0,06 \cdot e - B \cdot \tan^2(z)) + \partial_L \quad (8.2.1)$$

ii) Para a faixa de Radiofrequência (como sinal emitido):

$$\partial_{s_0} = 0,002277 \cdot \sec(z) \cdot \left\{ P + \left( \frac{1255}{T} + 0,05 \right) \cdot e - B \cdot \tan^2 z \right\} + \partial_R \quad (8.2.2)$$

onde:  $\partial_{s_0}$  = é a correção da refração (em metro);  
 $z$  = distância zenital aparente (raio ou vetor posição) do satélite; calculada por:  $z = Z - \partial_z''$

$$\partial_z'' = \frac{16'', 0 \cdot \tan Z}{T} \left( P + \frac{4800 \cdot e}{T} \right) - 0'', 07 \{ \tan^3 Z + \tan Z \} P / 1000 \quad (8.2.3)$$

(sendo  $\partial_z''$  ângulo de refração, em segundo de arco).

$Z$  = distância zenital verdadeira do satélite;  
 $B$  = fator de correção, é dado em função da altitude da estação de rastreamento, tabela X (9), em mb.  
 $P$  = pressão atmosférica no local da observação, em mb.  
 $e$  = pressão parcial do vapor d'água no local da observação, que depende da pressão do vapor saturado, em mb.  
 $\partial_L$  e  $\partial_R$  = correção em metros, em função da distância zenital aparente, para o caso de L.A.S.E.R. ou Radiofrequência, respectivamente; valores dados pela tabela XI (9).

### 8.3. Na Aerofotogrametria

Devido à presença do vapor d'água na atmosfera, a refração aerofotogramétrica calculada pela fórmula apresentada por Saastamoinen (27), mostra que há sempre um acréscimo de uma quantidade " $\delta_2$ " que raramente excede 1 ou 2 micro-radianos:

$$\delta_2 = 0,129 \cdot \tan \theta \cdot \left( \frac{e_1 - e_2}{H} + 95 \cdot e_2 / T_2 \right) \quad (8.3.1)$$

sendo:  $e_1$  = pressão parcial do vapor no solo, em mb;  
 $e_2$  = pressão parcial do vapor no nível da câmara, em mb,  
 estimada pela relação:  $e_2 = (p_2/p_1)e_1$ ;  
 $T_2$  = temperatura do ar no nível da câmara, em °K;  
 $\theta$  = ângulo nadiral;  
 $p_1$  = pressão atmosférica no solo, em mb;  
 $p_2$  = pressão atmosférica no nível da câmara, em mb;  
 $H$  = altura de voo, em metros.

Essa quantidade é usada na equação para o cálculo da refração fotogramétrica, segundo Saastamoinen, fórmula "standard" (27)

$$\Delta \theta = 2,316 \cdot \tan \theta \left( \frac{p_1 - p_2}{H} - 34,11 \cdot p_2 / T_2 \right) + \delta_1 + \delta_2. \quad (8.3.2)$$

sendo:  $\delta_1 = \tan \theta \left( \frac{2 + 3 \tan^2 \theta}{5} \right) \delta_1'$  a correção devido à curvatura da terra;  
 $\delta_2$  = correção devido à presença do vapor d'água na atmosfera;  
 $\delta_1'$  = correção da curvatura para  $\theta = 45^\circ$ , que é tabelado (página 808(27)), dado em km.

Nessas sugestões acima citadas, pode-se inclusive, usar as equações completas para o cálculo da refração, sem haver necessidade de negligenciar os termos de menor significado à guisa de simplificação.

## A P Ê N D I C E S

### 1. Como coletar a temperatura para o uso da equação.

Sendo o valor da pressão do vapor saturado uma função da temperatura obtida sobre a superfície da água (23), isto significa que, essa temperatura é uma temperatura de saturação, temperatura em que o ar se encontra saturado.

Na prática, consegue-se a saturação do ar, umidecendo um dos bulbos do termômetro (envolvido em gaze) na hora da observação; em consequência, haverá uma redução no valor da temperatura até haver um equilíbrio no processo de evaporação. Nesse momento, o valor da temperatura no termômetro de bulbo úmido é a temperatura da saturação do ar; e essa deve ser a temperatura usada como argumento de entrada na tabela ou nas equações para o cálculo da pressão do vapor saturado "e".

### 2. Uma "FUNCTION" para o cálculo da refração.

Para o cálculo da correção da refração nas medidas eletrônicas de distâncias, pode-se usar uma "FUNCTION", como esta por exemplo, na linguagem de computação Fortran IV:

```

FUNCTION ENE(TU,TS,P)

  D = 0,000367 *(1.+(TU-32.)/1571.)
  X = 7.5 *(TU -32.)/(TU + 395.1)
  EU = 0.18036* 10 ** X
  ES = EU - D * P * (TS - TU)
  B = 4730./(459.688 + TS)
  C = 8540./(459.688 + TS)
  A = B * C
  ENE= 1. + (B * P + A * ES)/10. ** 6.
  RETURN
END

```

Neste caso sendo usada a equação (6.2.1) com suas variáveis transformadas nas seguintes unidades:

TU = temperatura do ar (bulbo seco), em °F;  
 TS = temperatura do ar (bulbo úmido), em °F;  
 EU = pressão do vapor saturado, em pol.Hg;  
 ES = pressão parcial do vapor, em pol.Hg;  
 P = pressão atmosférica, em pol.Hg.

## I N D I C E

Atmosfera 03

    Composição Química 04

    Estrutura Física 03

Cauchy (equação) 09

Clausius-Clayperon (equação) 21

Índice de Refração 06

    Índice de Refração Padrão 11

Meteorologia 01

Permeabilidade Magnética do meio 06

Permissividade Elétrica do meio 06

Permissividade Relativa 07, 10

Polarizabilidade Atômica 07

Pressão do Vapor d'Água 13

    Equações 13,14, 15

    Gráfico 15

Pressão do Vapor Saturado 17

    Equações 21, 24, 25

    Equação para o uso em Ciências Geodésicas 25

    Tabelas 19, 22, 23, 26, 27, 28, 29

Propagação Eletromagnética na Atmosfera 06

Refração Atmosférica 06

    Correção 10, 11

    Refração Astronômica 31

    Refração Aerofotogramétrica 33

    Refração em Medidas de Distâncias 10

    Refração em Geodésia Satélite 32

Suscetibilidade Elétrica Estática 07

Troposfera 04



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 - ALATYRTSEV, A.A. - Engineering Handbook of Space Technology. Ohio, Foreign Technology Division Air Force Systems Command U.S. Air Force - 1969. 696p.
- 2 - CAVALCANTI, Luiz F. - I Seminário de Computação Eletrônica Aplicada às Ciências Geodésicas. Curitiba, Universidade Federal do Paraná - 1970.
- 3 - ANUNCIAÇÃO, Paulo Eugênio M. de - Introdução à Meteorologia. Curitiba, Gráfica e Editora Dom Bosco Ltda - 1973.
- 4 - ANUNCIAÇÃO, Paulo Eugênio M. de - Tropopausa sobre Curitiba. Curitiba, Universidade Federal do Paraná - 1975.
- 5 - BELINSKII, V.A. - Dynamic Meteorology. Moscow, Ogiz, 1948. 591 p.
- 6 - BERRY, F.A. Jr "et al" - Handbook of Meteorology. N. York, Mc Graw-Book Co Inc - 1945.
- 7 - BORN, Max & Wolf, Emil - Principles of Optics - Eletromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light, fifth Ed. Oxford - G. Britain, Pergamon Press Ltd - 1975.
- 8 - BOMFORD, G.B. - Geodesy. Third Ed. Oxford, at the Clarendon Press, Ely House - 1971.
- 9 - SAASTAMOINEN, J. - Contribution to the theory of atmospheric refraction. Bulletin Geodesique, (107):13-34, mars - 1973.
- 10 - GEOSSMAN, Nathaniel - A simple variational approach to refraction and related problems in geodesy. Bulletin Geodesique, (117):217-233, septembre - 1975.

- 11 - BURNSIDE, C.D. - Eletromagnetic Distance Measurement.  
London-Great Britain, Crosby Lockwood & Son Ltd -  
1971. 117 p.
- 12 - DE VUYST, Paul - La Météorologie.  
Bruxelles, A. de Visscher Éditeur - 1972, 164 p.
- 13 - DOUBEK, Álvaro - Levantamentos Eletrônicos (1a. Parte).  
Curitiba, Universidade Federal do Paraná - 1974, 205p.
- 14 - GEMAEL, Camil - Levantamentos Eletrônicos.  
Curitiba, Universidade Federal do Paraná - Diretório  
Acadêmico de Engenharia do Paraná - 1970.
- 15 - HUMPHREYS, W.J. - Physics of The Air. Third Ed.  
N. York, Mc Graw Hill - 1940.
- 16 - LEE, John & SEARS, Francis W. - Termodinâmica, tradução  
Borisas Cimblaris. Rio de Janeiro, Livro Técnico S.A.  
1969.
- 17 - LONGLEY, R.W. & HEWSON, E.W. - Meteorology Theoretical  
and Applied. N. York, John Willey & Sons Inc. 1951.
- 18 - LONGLEY, R.W. - Tratado Ilustrado de Meteorologia.  
Buenos Aires, S.A. Editorial Bell. 1973.
- 19 - MATHIEU, J.P. - Optics, part 2 Quantum Optics - transl.  
by J.W. Blacher. N. York, Pergamon Press Ltd- 1975.
- 20 - SAUCIER, W.J. - Principles of Meteorological Analysis.  
Fifth Ed. . Chicago, University of Chicago Press-  
1967. 438 p.
- 21 - MORSE, P.M. - Thermal Physics, 2ed. Ed.  
N. York, W.A. Benjamin, 1969. 431 p.
- 22 - REITZ, John R. & MILFORD, F.J. - Fundations of Eletro-  
magnetic Theory, Sec. Ed. . Addison-Wesley. 1972.

- 23 - PENMAN, H.L. - Humidity.  
N. York, Reinhold Publishing Co. - 1955.
- 24 - ZUEV, V.E. - Propagation of Visible and Infrared Radiation in the Atmosphere, transl. from russian by D. Lederman. N.York, John Wiley & Sons Inc - 1974.
- 25 - LIST, Robert S. - Smithsonian Meteorological Tables.  
Sixth Revised Ed. (First Reprint). U.S. Weather Bureau. Washington - 1958.
- 26 - JOSHI, C.S. - Refraction Effects of Atmosphere on Geodetic Measurements to Celestial Bodies. Report N°192  
NASA - Ohio State University, Columbus - Ohio, 1973.
- 27 - SAASTAMOINEN, J. - Refraction. Photogrammetric Engineering, Vol. XXXVIII, N°8, 799-810, August 1972.

/ / /